PROTREPSIS
Revista de Filosofía

ISSN: 2007-9273
Protrepsis, Año 14, Número 27 (noviembre 2024 - abril 2025) 09 - 36

Recibido: 01/10/2024
Revisado: 12/11/2024
Aceptado: 27/11/2024

Kant: sobre la necesidad de la matemática

Rodney Morales Xelhuantzi [1]

[1] Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Iztapalapa
Ciudad de México, México
E-mail: ro_xelhuantzi@hotmail.com

Resumen: La propuesta de este trabajo es explicar la relación entre la necesidad de los juicios de la matemática y la justificación del conocimiento acerca de ellos en el marco de la filosofía crítica de Immanuel Kant. En este contexto, se marcará una diferencia entre la modalidad epistémica, entendida como el acceso a experiencias posibles; la modalidad metafísica, entendida como la necesidad o la posibilidad de los objetos en sí mismos de tener ciertas propiedades; y la modalidad lógico-conceptual, entendida como la necesidad o la posibilidad de afirmar o negar proposiciones obedeciendo los principios lógicos de identidad y de contradicción, y el contenido de los conceptos. Sostengo que la necesidad kantiana de las proposiciones matemáticas es epistémica porque depende de las facultades cognitivas que la razón pura suministra, especialmente, de la intuición pura.

Palabras clave: Análisis, *a priori*, concepto, intuición, mundos posibles, síntesis.

Abstract: The purpose of this paper is to explain the relationship between the necessity of mathematical judgments and the justification of knowledge about them within the framework of Immanuel Kant's critical philosophy. In this context, a distinction will be made among the epistemic modality, understood as the access to possible experiences; the metaphysical modality, understood as the necessity or possibility of objects in themselves to have certain properties; and the logical-conceptual modality, understood as the necessity or possibility of affirming or denying propositions obeying the logical principles of identity and contradiction, and the content of concepts. I maintain that the Kantian necessity of mathematical propositions is epistemic because it depends on the cognitive faculties that pure reason provides, especially pure intuition.

Keywords: Analysis, *a priori*, concept, intuition, posible worlds, synthesis.

Introducción

Es bien conocido que para Kant todos los juicios de la matemática son sintéticos *a priori*. Para sostener esta tesis, él tuvo que discutir la filosofía de las matemáticas del racionalismo continental del siglo XVII, especialmente la de Leibniz, que defendió que las proposiciones matemáticas son analíticas y que se rigen por los principios de contradicción y de identidad. Ambos son principios lógicos inquebrantables. El primero se aplica para cualquier proposición y vale universal y necesariamente; el segundo aplica para cualquier entidad, incluidas las del lenguaje: proposiciones, contenidos conceptuales, etc. El carácter lógico que domina a las proposiciones matemáticas les otorga un carácter modal: el de ser proposiciones necesarias. Si bien la modalidad de las matemáticas no fue una propuesta innovadora en los albores de la modernidad, el racionalismo se sirvió del análisis lógico y conceptual para pensar las proposiciones y objetos matemáticos como necesarios.

Sin embargo, Kant en su discusión llega a la conclusión de que las proposiciones analíticas no llevan a la razón a ningún nuevo conocimiento, pese a que, en efecto, son lógica y conceptualmente necesarias. Para que la razón pura ensanche su conocimiento matemático, tiene que tomar un camino diferente del análisis; tiene que exponer los conceptos puros en la intuición pura sin recurrir al auxilio de la experiencia. Con ayuda de su concepción de las intuiciones puras del espacio y el tiempo, Kant explica cómo nuevos conocimientos matemáticos se justifican lejos del solo análisis de conceptos, es decir, cómo son posibles los juicios matemáticos sintéticos *a priori*. En tanto que un juicio es *a priori*, es necesario, dice Kant, así que todo juicio matemático es necesario. Pero, a diferencia de los analíticos, los sintéticos no se rigen por los principios lógicos mencionados, de modo que pueden ser negados sin contradicción. Si esto es cierto, entonces ¿qué explicación tiene Kant para el hecho de que un juicio aritmético sea necesario, pero simultáneamente se pueda negar? Si no es la lógica ni el contenido de los conceptos lo que apoya la necesidad en los juicios sintéticos, ¿qué es? ¿De dónde viene su necesidad? La respuesta de Kant es que la necesidad de la matemática está dada por nuestras facultades cognitivas, particularmente por la construcción de conceptos matemáticos desde la intuición pura y desde los conceptos puros de la razón, que son todos *a priori*.

La necesidad en la matemática antes de Kant: Descartes, Spinoza y Leibniz

En sus *Meditaciones de filosofía primera* (1641), René Descartes sostiene que de la experiencia no obtenemos conocimientos fiables, sino únicamente dudosos. Es dudoso, por ejemplo, que usted esté sentado leyendo este artículo frente a su ordenador, porque todas estas representaciones formadas en su mente podrían ser producto de un ensueño que ocurre mientras, en realidad, usted está dormido en su habitación (Descartes, trad. en 1996: 13). Sin embargo, para Descartes hay algunas proposiciones en las que la duda no tiene lugar. El famoso *cogito, ergo sum* es, en palabras del francés, una proposición "necesariamente verdadera siempre que yo la pronuncie o sea concebida en mi mente" (Descartes, trad. en 1996: 17). Es una verdad necesaria porque, aun concediendo que todos nuestros pensamientos o creencias son falsos, el pensamiento reflexivo de segundo orden de que estamos pensando no podría ser falso. Así, hay al menos una proposición cuyo conocimiento no se justifica en las experiencias dudosas del sentido externo y que por ello goza de completa certeza. Pensar que pienso, aunque mi pensamiento-objeto sea falso, es una prueba irrefutable de que existo. El carácter necesario de la proposición es un signo de su certeza.

Descartes considera que las proposiciones matemáticas, particularmente las de la geometría, son eternas, y la eternidad atribuida a la matemática es, bajo cierta interpretación, una equivalencia de la necesidad[1]. La eternidad de tales proposiciones se explica por su estrecha relación con sus respectivos objetos matemáticos, que poseen esencias igualmente eternas. Un triángulo —se lee en la quinta meditación (Descartes, trad. en 1996: 45)— tiene una esencia propia y objetiva, y de cada una de sus propiedades se tiene certeza incluso si de él no hay experiencia pasada ni futura. Que la suma de sus tres ángulos agudos es igual a dos rectos es una verdad eterna que depende de la esencia de la figura; es cierta porque su conocimiento es *a priori* (si por *a priori* entendemos el sentido kantiano de una justificación epistémica[2] que prescinde de la experiencia), y es, por tanto, una verdad eterna o necesaria. En consecuencia, la necesidad cartesiana de las verdades matemáticas se fundamenta en las propiedades esenciales de los objetos matemáticos.

[1] La equivalencia entre necesidad y eternidad cartesianas se debe a la interpretación de Edwin Curley (1984). Su argumento dice que lo eterno depende de la voluntad de Dios al crear el mundo. Él, por su libre voluntad, pudo haber dispuesto que la suma de los ángulos agudos del triángulo fuera mayor que dos rectos, por lo que esta sería una verdad eterna en un mundo alterno al nuestro. El hecho de que Dios pueda elegir una u otra verdad eterna acerca del triángulo, muestra que las proposiciones matemáticas no son necesarias; si lo fueran, Dios no podría cambiarlas, lo que es inconcebible para Descartes. No obstante, Curley dice que el estado de cosas actual es una entre muchas posibilidades elegidas por Dios, y puesto que en este estado el triángulo no puede tener otras propiedades (al menos en un modelo geométrico euclideano), entonces las verdades sobre el triángulo y, en general, de la matemática, son posiblemente necesarias.

[2] Para Kant, lo *a priori* es claro, cierto y tiene carácter necesario, como en Descartes (trad. en 2009: A2).

Baruch Spinoza, en el contexto del racionalismo, comparte este parecer. En la *Ética* (1677) dice que "de la naturaleza del triángulo se sigue, desde la eternidad y para la eternidad, que sus tres ángulos valen dos rectos" (Spinoza, trad. en 2021: 87) y que de esta identidad entre ángulos internos y rectos se sigue el concepto de triángulo y viceversa, porque "esa afirmación pertenece a la esencia del triángulo" (Spinoza. trad. en 2021: 184).

Esta propuesta común en Descartes y Spinoza deja abiertas algunas interrogantes: ¿cómo llega el pensamiento a la esencia de los objetos matemáticos para justificar que las verdades que dependen de ella son eternas o necesarias? ¿cómo justificar *a priori* el conocimiento de que un triángulo tiene ángulos internos cuya suma es igual a dos ángulos rectos?

Otra propuesta racionalista alterna es la de G. W. Leibniz, que fundamenta la necesidad matemática en dos principios lógicamente necesarios. Por un lado, él apunta que hay verdades absolutamente necesarias, como las de las ciencias formales (lógica, aritmética, geometría), que encuentran su fundamento en el principio lógico de no contradicción (Leibniz, trad. en 2011*c*: 666; trad. en 2011*b*: 102). Por otro lado, está el principio lógico de identidad, que, junto con el anterior, fundamenta las proposiciones matemáticas. En palabras de Leibniz, la primera proposición necesaria es una tautología, "*A* es *A*" (Leibniz, trad. en 2011*a*: 87), y la primera proposición imposible es una contradicción, "*A* no es *A*" (Leibniz, trad. en 2011*a*: 87), de lo que se sigue que ambos principios lógicos tienen un carácter modal. Su argumento dice que todas las verdades matemáticas son reducibles a tautologías y sus negaciones a contradicciones, de modo que, si son absolutamente necesarias es porque obedecen a los principios de identidad y de no contradicción, que son lógicamente necesarios. Por ejemplo, 2+2=4 se puede descomponer como una proposición en la que los términos sean explícitamente idénticos: 4 = 1+1+1+1; 2 = 1+1; entonces: 2+2 es lo mismo que 1+1+1+1; por tanto: 2+2 = 4 es lo mismo que 1+1+1+1 = 1+1+1+1. Con esto se demuestra la verdad de la proposición 2+2=4, poniendo de manifiesto *explícitamente* la identidad vía el análisis de los términos complejos de la proposición, y dejando la proposición original en la forma $a = a$, que es la formalización del principio de identidad[3]. Igualmente, la proposición 2<3 es transformable en una desigualdad de la forma $1+1 \neq 1+1+1$, o su equivalente, la negación de una identidad, $\neg(1+1=1+1+1)$, con lo que se expone que el grupo de unidades a la izquierda del símbolo de desigualdad es menor que el grupo de la derecha (Look, 2022).

Leibniz, quien antes que Kant ya conocía la diferencia entre analítico y sintético, sostuvo que las proposiciones aritméticas son analíticas. La analiticidad de la aritmética se apoya en la descomposición de términos o proposiciones complejas en otros más simples, tal como ha mostrado

[3] "*Todas las verdades se resuelven en definiciones, proposiciones idénticas y observaciones*" (Leibniz, trad. en 2011*a*: 87). Cabe destacar que la negación de 2+2=4 atenta contra el principio de no contradicción, lo que evidencia que ambos principios lógicos son dos caras de una misma moneda.

el ejemplo anterior. Hay un tránsito desde una proposición aritmética particular con términos complejos hacia un principio lógico general con términos simples. Él menciona que hay análisis "cuando dada alguna conclusión o propuesto algún problema, buscamos los principios a partir de los cuales podemos demostrarlo o resolverlo", mientras que la síntesis se presenta "cuando empezando por los principios componemos teoremas o problemas" (Leibniz, trad, en 2011a: 88). Esto alude más a un método de demostración que al contenido de proposiciones; sin embargo, en otro texto dice que:

> en las proposiciones idénticas esa conexión [entre los términos de la proposición] y la inclusión del predicado en el sujeto es expresa; en las demás, en cambio, implícita, y ha de ponerse de manifiesto por el análisis de las nociones, en el cual estriba la demostración a priori. (Leibniz, trad. en 2011a: 108)

Desde luego, tal distinción anuncia a Kant.

La tesis leibniziana es atractiva porque por encima de aquellas verdades matemáticas que se consideran de suyo necesarias hay un par de principios lógicamente necesarios que no necesitan justificación alguna más que el sólo pensamiento puro, lo que ayudaría a responder la segunda de las preguntas que Descartes y Spinoza han dejado abiertas. Probablemente, estos filósofos habrían estado dispuestos a admitir que las proposiciones sobre el triángulo son analíticas (pese a que no conocieron la distinción analítico/sintético), en el sentido de que en el concepto de esta figura está implícito que necesariamente la suma de sus ángulos internos es igual a dos ángulos rectos, esto es, en el sentido de descomponer el concepto en sus partes más simples. pero es algo que no podemos asegurar.

La necesidad y las definiciones matemáticas

Si se desea saber cómo conocer la esencia de los objetos matemáticos, tal como lo mencionan Descartes y Spinoza, se podría elegir el camino de la definición de los conceptos matemáticos. Por la dicotomía entre definiciones reales y definiciones nominales, que se remonta hasta Aristóteles, es factible que el conocimiento de la definición nominal justifique el conocimiento de la definición real; es decir, conocemos la esencia de algunas entidades matemáticas (triángulos, por ejemplo) a través de la comprensión del significado de los conceptos que la determinan[4]. El camino inverso también es razonable: si conocemos la esencia de una entidad, entonces conocemos como necesariamente verdadera su definición nominal. Esto último parece ser lo que Descartes y Spinoza dicen en la quinta meditación y en los pasajes de la *Ética* citados, respectivamente. Lo que se dice de un triángulo está determinado por las propiedades reales de la figura, y éstas no pueden

[4] Algunos filósofos contemporáneos, como Bob Hale (Hale, 2020), defienden esta postura.

rebasar los límites de los conceptos que definen la figura. Lo que es el objeto y su definición siempre se corresponden.

La definición, además, tiene la característica de ser conocida siempre *a priori*. La conexión del *definiendum* con el *definiens* no precisa de la experiencia, sino de una adecuación entre el contenido conceptual del primero con el del segundo que ocurre por análisis. Al definir un concepto, cuidamos que el *definiens* se adecúe completa y correctamente a una determinación completa mediante otros conceptos del significado del *definiendum*. Si definimos el concepto de *triángulo* como una figura compuesta por tres líneas rectas que se unen formando tres ángulos internos cuya suma es igual a dos ángulos rectos[5], veremos que la experiencia no tiene ningún rol que tomar para que ambos elementos de la definición se correspondan. Una definición explícita en matemáticas, donde el *definiendum* y el *definiens* son intercambiables dado que su contenido es el mismo, es un buen ejemplo de una proposición conocida *a priori*. Las definiciones ostensivas, en las que tomamos un concepto o un objeto y arbitrariamente lo definimos mediante conceptos que lo determinan, también son conocidas *a priori*, pues el conocimiento de la estipulación no necesita de ninguna experiencia que lo justifique[6].

Por su parte, Kant afirma que la definición debe ser la presentación original y detallada de un concepto dentro de sus propios límites (Kant, trad. En 2009: A727=B750). Original —explica— porque no debe derivarse de otro concepto; detallada, porque todo lo que le caracteriza, es decir, sus marcas distintivas (*Merkmale*), debe ser claro y suficiente; y dentro de sus límites, porque debe ser preciso. Esto no dice nada acerca de si las definiciones matemáticas para Kant son reales o nominales, aunque sí consideró tal distinción. Las definiciones nominales kantianas llevan consigo la esencia lógica del concepto en cuestión, que es su intensión, es decir, un concepto superior que está contenido *en* el concepto definido[7], y es hallada mediante la reflexión sobre su predicado (Beck, 1956: 181-182; Capozzi, 1980: 427). Las definiciones reales, por otro lado, "contienen una marca clara por la cual el objeto puede ser reconocido y en virtud de lo cual el concepto se muestra que tiene 'realidad objetiva', con lo cual se demuestra que hay una cosa definida" (Beck, 1956: 181). Las definiciones reales se constituyen por predicados sintéticos, que son aquellos que determinan objetos mediante la intuición, de modo que las definiciones reales derivan siempre en juicios sintéticos (Beck, 1956: 182).

---

[5] Desde luego, esta definición no es precisa, pero ilustra el asunto.

[6] Saul Kripke habla de estas definiciones en su *Naming and necessity* (1980), pero el asunto ya lo había tratado Kant en (Kant, trad. en 2009: A729/B757)

[7] Por ejemplo, la definición nominal del concepto *humano* es *mamífero* y *animal*, que son conceptos más amplios que subsumen al primero y que al mismo tiempo están *en* él.

Una interpretación común entre algunos comentaristas contemporáneos sostiene que, para Kant, en matemáticas las definiciones son reales (Heis, 2014: 608; Capozzi, 1980: 429; Beck, 1956: 186). En efecto, las definiciones nominales no son más que explicaciones discursivas acerca del *significado* del concepto en cuya esencia lógica no hay un compromiso con los objetos matemáticos tales como números o figuras geométricas. El matemático, a diferencia del filósofo, no puede limitar sus conceptos a la sola explicación discursiva de sus conceptos, es decir, a su esencia lógica, pues éstos son construidos por él en la intuición, con lo que inmediatamente obtiene una definición real. Si bien, hay un punto de convergencia entre definiciones nominales y definiciones reales, como afirma Capozzi (Capozzi, 1980: 426), a saber, el de asignar nombres a los conceptos al definirlos, no podríamos conocer la esencia real de los objetos matemáticos desde la explicación discursiva del significado conceptual. Por tanto, únicamente las definiciones reales son propias de la matemática. Esta postura concuerda perfectamente con la tesis fuerte de Kant de que los juicios de la matemática son sintéticos *a priori*, en los que la intuición pura es un elemento esencial. Un juicio sintético *a priori* implica construir un concepto matemático, y construir uno es tanto como definirlo realmente.

Puesto que construcción de conceptos en la intuición y definición real son la misma cosa, entonces, como comenta Jeremy Heis (Heis, 2014: 608), los conceptos no son *dados*, sino que son *hechos* por el sujeto en las intuiciones puras. Además, la construcción de conceptos lleva consigo necesariamente un objeto, lo construido, de suerte que la definición real es definición de un concepto en el que cae un objeto; dicho de otro modo: no hay conceptos construidos que sean vacíos, sin objetos. Es importante destacarlo porque conocer la esencia real de los objetos de la matemática no es algo proveniente de fuera, de la experiencia; y si bien se lleva a cabo *en* el sujeto, eso no indica tampoco que sea arbitrario: "Las entidades matemáticas no son productos lógicos arbitrarios de predicados lógicos compatibles; los conceptos tienen validez objetiva (dentro de la intuición) que se muestra a través de la presentación de la determinación correspondiente" (Beck, 1956: 186). Así, la necesidad de las proposiciones matemáticas no es algo dado, algo que pertenezca y que llegue de un objeto externo, esa necesidad radica en las facultades del sujeto con las cuales construye el concepto.

La observación de que las definiciones reales surgen inmediatamente de la construcción de conceptos en la intuición pura conduce al pensamiento de que la necesidad atribuida a las proposiciones matemáticas no radica en objetos externos a las facultades humanas, por el contrario, depende de ellas. En la *Crítica de la razón pura* (1781) (*CRP*)[8] Kant apunta que al preguntar si un

[8] Las obras de Kant se indican con las siguientes abreviaturas en su forma canónica:
CRP = Crítica de la Razón pura, ediciones A y B
JL = The Jäsche Logic
VL = Vien Logic

objeto externo es necesario “no se piensan más determinaciones en el objeto mismo, sino que sólo se pregunta cómo se comporta éste [...] con respecto al entendimiento” (Kant, trad. en 2009: A219). Puesto que conocemos los objetos únicamente en la experiencia, y ésta nunca es fuente de necesidad, se sigue que es un sinsentido pensar en objetos necesarios, a menos que se trate de aquellos que se forman en el sentido interno. La necesidad depende de la estructura del pensamiento humano, por lo cual no puede ser inferida de la constitución metafísica de los objetos en sí mismos (Abaci, 2021: 299). De esto se infiere que para Kant la necesidad, así como la posibilidad y la contingencia, no es metafísica, sino que depende en algún grado de la razón. Por tanto, la necesidad está sujeta a nuestras facultades humanas con las que construimos conceptos matemáticos.

Necesidad, certeza y conocimiento *a priori* en la matemática

Necesidad y aprioridad son dos nociones kantianas coextensivas[9]: una proposición es conocida *a priori* si y sólo si es necesaria. Desde las primeras líneas de la introducción de *CRP* se apunta que el conocimiento con carácter de necesidad es *a priori* y poco después se menciona que la necesidad de una proposición, así como su universalidad, sólo pueden emanar del conocimiento *a priori* (Kant, trad. en 2009: A2). De la experiencia —dice Kant— nunca se obtiene universalidad ni necesidad, sino hechos contingentes que pueden romper la regla de una generalidad apoyada por inducción. La proposición empírica *Todos los cuerpos son pesados* es susceptible de ser negada por una experiencia posible que reporte lo contrario; puesto que no se tienen todas las experiencias de la pesadez de todos los cuerpos, no tiene universalidad, y puesto que es posible que en alguna experiencia futura haya un cuerpo no pesado, tampoco hay necesidad. En *CRP* leemos: “La necesidad y la universalidad estricta son, por tanto, señales seguras de un conocimiento *a priori*, y son también inseparables una de la otra” (Kant, trad. en 2009: B4).

Una interesante explicación de la relación entre necesidad y conocimiento *a priori* en Kant se encuentra en la interpretación de Philip Kitcher basada en la teoría de los mundos posibles. De acuerdo con él, los mundos posibles kantianos son la “totalidad de apariencias posibles, esto es, experiencias que podrían ser experiencias para nosotros” (Kitcher, 1975: 24). Así, un mundo posible kantiano se define en función de nuestro acceso epistémico, limitado por nuestras facultades cognoscitivas, a hechos presentados como fenómenos, pasados, actuales o futuros. Si esta interpretación es coherente con el pensamiento de Kant, entonces la modalidad no es metafísica porque no se apoya en la existencia de otros mundos *stricto sensu*, como en el realismo modal de David Lewis, sino en nuestra capacidad de acceder a experiencias según los límites de nuestras

---

Prol. = Prolegómenos a toda metafísica futura

[9] Kitcher menciona la misma coextensividad, pero él defiende que la necesidad es metafísica (Kitcher, 1975: 26), mientras que se sostiene aquí que dicha necesidad es epistémica.

facultades humanas de conocimiento. En conformidad con ello, si hay un acceso epistémico a alguna experiencia, las proposiciones que de ella emanan son meramente posibles; si tengo acceso a todas las experiencias, las proposiciones serían necesarias; si no tengo acceso a ninguna experiencia, la proposición sería imposible[10]. Aceptar esto implicaría aparentemente[11] que de la sensibilidad se sigue la necesidad y la imposibilidad, lo que para Kant es inaceptable, pues lo necesario y lo imposible no pertenecen a los fenómenos que nos son dados vía la sensibilidad. ¿Cómo entonces se explica la relación entre la necesidad y lo *a priori* de acuerdo con la sugerencia de Kitcher? La respuesta a ello se puede apoyar en las palabras de Kant cuando señala que "aunque todo nuestro conocimiento comience **con** la experiencia, no por eso surge todo él **de** la experiencia" (Kant, trad. en 2009: B1). En efecto, el conocimiento *a priori* es, por definición, independiente de cualquier experiencia; por lo tanto, por vacuidad, está justificado por encima de cualquier experiencia (mundo) posible. La dicotomía entre *a priori* y *a posteriori* explica que, no porque una proposición no sea conocida gracias a nuestro acceso epistémico a experiencias posibles mediante la sensibilidad, significa que no es conocida en absoluto ni que es imposible, sino lo contrario: la sensibilidad no es una condición necesaria para todo conocimiento, por lo que cabe tener proposiciones necesarias. En consecuencia, y en concordancia con esta interpretación, una proposición es verdadera en cualquier experiencia o mundo posible (es necesaria) si y sólo si su conocimiento se justifica por encima de cualquier experiencia o mundo posible (es *a priori*).

Además de relacionarse con el conocimiento *a priori*, la necesidad también está relacionada directamente con los juicios apodícticos en la tabla lógica del entendimiento, que se definen como aquellos "en los que [el afirmar o el negar] se lo considera como *necesario*" (Kant, trad. en 2009: A75/B100). Como aquélla, los juicios apodícticos dependen de nuestras facultades de conocer, pues en lo apodíctico no se agrega nada al contenido del juicio como lo hacen las otras funciones lógicas del entendimiento (cantidad, cualidad y relación), "sino que [lo apodíctico] solo interesa al valor de la cópula con respecto al pensar en general" (Kant, trad. en 2009: A74/B100). Lo apodíctico de un juicio tiene que ver con cómo llevamos a cabo epistémicamente un juicio, esto es, con el grado de certeza con que lo afirmamos, que es dado por la conciencia de la necesidad del mismo (Kant, trad. en 1992a: 66, 108).

Ian Blecher (Blecher, 2021: 308) nota que el término *apodíctico* es tomado por Kant de uno de la lógica aristotélica, *apodeixis*, traducido como *demostración* y definido como "un silogismo que

[10] Cabe destacar que esta concepción de las modalidades kantianas coincide con sus definiciones de *posible, efectivamente real* y *necesario* al inicio de "Los postulados del pensar empírico en general" (Kant, trad. en 2009: A218/B266). Kant no menciona la contingencia ni la imposibilidad como modalidades, pero éstas pueden muy bien acomodarse a sus definiciones.

[11] En realidad, no es así. De hecho, ser necesario también significa ser verdadero en todas las experiencias posibles. Ver abajo, página 20.

produce conocimiento científico" (Aristóteles, trad. en 1960: 31)[12]. No sólo es la palabra, sino también la fuerza epistémica lo que Kant hereda de Aristóteles. Para Kant el conocimiento (*Wissen*) es uno de los tres *modi* de tomar algo como verdadero[13] y el único que lo hace con carácter de necesidad; por eso se asocian los juicios apodícticos con el conocimiento (Kant, trad. en 1992a: 66). Se trata, así, de una gradación epistémica, pues no es lo mismo tener un juicio asertórico (una proposición verdadera con condiciones de verdad materiales correspondiente a la creencia) que un juicio apodíctico, que determina al asertórico mediante las leyes del entendimiento puro, por lo cual llega a un conocimiento *a priori* de su contenido y le da el carácter de necesidad (Kant, trad. en 2009: A76). De la misma manera, en el silogismo no es lo mismo creer en la verdad de su conclusión que conocerla mediante una demostración lógica. De hecho, Kant, como Aristóteles, llama demostraciones a algunos juicios apodícticos. Una demostración en Kant es una prueba apodíctica en la que los conceptos puros son exhibidos en las intuiciones igualmente puras del espacio y el tiempo (Kant, trad. en 2009: A734/B762). Sin embargo, cabe aclarar que Kant también habla de conocimientos apodícticamente ciertos en los que una verdad empírica está mezclada. Pero en tal conocimiento se considera únicamente "*el poder de juzgar* al considerar los criterios subjetivos de subsunción de un juicio bajo ciertas reglas" (Kant, trad. en 1992a: 66), lo que significa que se trata de un juicio empírico tomado como verdadero porque ha sido derivado bajo las reglas de un razonamiento a partir de otros juicios empíricos verdaderos. Por tanto, un juicio apodícticamente cierto pero empírico surge de una demostración silogística, en el sentido llano de la palabra de la lógica elemental, que pasa por alto el origen epistémico del contenido de las proposiciones. Pero este sentido de *demostración* no es del interés de la razón pura sino el que *produce conocimiento científico*. Entonces, hay que diferenciar entre la certeza apodíctica que tenemos de un juicio *porque* está sujeto a las reglas de inferencia de un razonamiento deductivo, de la certeza empírica basada en nuestra propia experiencia o en la de alguien más (Kant, trad. en 1992a: 71). Un juicio empírico puede gozar de ambas certezas: en cuanto a su contenido, tiene certeza empírica, en cuanto a su rol como conclusión de un razonamiento deductivo tiene certeza apodíctica.

[12] Jaakko Hintikka (Hintikka, 1967: 361) observa que en el método matemático de Euclides se encuentra *apodeixis*, que es el último paso en una demostración geométrica. Hintikka sostiene que, debido a la influencia de la matemática griega sobre los estudios de Kant, y especialmente la de los *Elementa* de Euclides, el término kantiano *apodíctico* tiene su origen en el matemático griego. Cuál sea el origen exacto del término de Kant es imposible saberlo, pero dado que en Euclides —según lo presenta Hintikka— *apodeixis* también significa y tiene el sentido de *prueba* o *demostración* a partir de *una serie de inferencias* hechas desde axiomas y proposiciones adicionales, la postura de Hintikka complementa la de Blecher.

[13] Entre los que también se cuenta la opinión y la creencia, relacionadas, respectivamente, con los juicios problemáticos y los asertóricos.

En *CRP* (Kant, trad. en 2009: A734/B762) se dividen los juicios apodícticos en discursivos, basados únicamente en conceptos *a priori* y propios de la filosofía y la metafísica, y en intuitivos, que pertenecen únicamente a la matemática. Asimismo, la certeza racional se divide en discursiva, también llamada evidencia, y en intuitiva (Kant, trad. en 1992a: 70). Esta división es de especial importancia en la filosofía de las matemáticas de Kant porque, como fácilmente se advierte, es paralela a la división entre juicios analíticos y juicios sintéticos, respectivamente. Como es bien conocido, en los juicios de la matemática las intuiciones puras de tiempo y espacio desempeñan un papel capital en la construcción de conceptos matemáticos. En este sentido, Kant afirma en el mismo pasaje de la *CRP* que:

> A partir de conceptos *a priori* (en conocimientos discursivos) no puede nunca, empero, surgir certeza intuitiva, es decir, evidencia, por mucho que el juicio sea apodícticamente cierto. Por tanto, sólo la matemática contiene demostraciones, porque ella no deduce sus conocimientos a partir de conceptos, sino a partir de la construcción de éstos, es decir, a partir de la intuición, que puede ser dada *a priori* de manera correspondiente a los conceptos. (Kant, trad. en 2009: A734/B762)

Los juicios analíticos son apodícticos discursivos porque son explicativos de un concepto mediante su propia descomposición; los juicios sintéticos, por el contrario, son generativos o constructivos de conceptos a partir de otros conceptos puros del entendimiento con el auxilio imprescindible de la intuición pura. Por tanto, sólo en los juicios sintéticos algo nuevo se llega a conocer.

Por ello, la matemática, en comparación con la metafísica, en tanto que se compone de juicios sintéticos *a priori*, goza del mayor estatus epistémico dentro de la filosofía crítica de Kant, pues todas sus proposiciones son necesarias, el conocimiento de sus contenidos tiene certeza apodíctica y éste se justifica fuera de toda experiencia posible, es decir, es *a priori*. El conocimiento científico que Aristóteles, menciona Kant, lo encuentra en la matemática[14]. Los frecuentes contrastes que Kant resalta entre el conocimiento filosófico y el matemático son evidencia de esto. En *CRP* dice:

> La matemática ofrece el ejemplo más brillante de una razón pura que se ensancha felizmente por sí misma, sin el auxilio de la experiencia. [...] nos importa mucho saber si el método para alcanzar la certeza apodíctica, [método] que en la última ciencia se llama *matemático*, es idéntico a aquel con el cual se busca, en la filosofía, precisamente esa certeza, y que debería llamarse [método] *dogmático*. (Kant, trad. en 2009: A712/B740-A713/B741)

[14] En *JL* se lee: "De [la palabra] *conocimiento* (*Wissen*) viene [la palabra] *ciencia* (*Wissenschaft*), por lo cual se entiende lo complejo de la cognición como un *sistema*" (Kant, trad. en 1992a: 72). Claramente esto coincide con las palabras citadas arriba del *Organon* aristotélico.

Su respuesta a esta cuestión es negativa: él dice que en el campo de la geometría un triángulo, en manos del filósofo, sólo sería analizado como concepto sin poder extraer un nuevo conocimiento de él; en cambio, en manos del matemático, el conocimiento acerca del triángulo se extiende "por una cadena de razonamientos, guiado siempre por la intuición" (Kant, trad. en 2009: A716/B744-A717/B745; Hintikka, 1967: 362). Si bien, tanto el filósofo con el análisis como el matemático con la síntesis tienen ambos juicios apodícticos, necesarios y *a priori*, la sutil pero esencial diferencia radica en la extensión de nuestro conocimiento: el filósofo vuelve siempre al concepto que fue su punto de partida en el análisis; el matemático trasciende mediante la síntesis de unos conceptos a otros. Por tanto, la necesidad, lo apodíctico y lo *a priori* de los juicios matemáticos no son suficientes, aunque sí necesarios, para exponer la matemática como un modelo de conocimiento de la razón pura.

Necesidad lógica y contenido conceptual

Uno de los principios lógicos que ningún filósofo se atrevió a cuestionar *qua* lógico[15] desde la Antigüedad hasta la aparición de las lógicas no clásicas es el *principio de no contradicción*. Ya desde Aristóteles se presenta como un principio necesario y relacionado con las matemáticas (Aristóteles, trad. en 1998: IV, 3). Como quedó apuntado en la primera sección de este escrito, Leibniz retoma esta relación y la lleva a un reduccionismo: las proposiciones matemáticas son demostrables según dos principios lógicos, de ahí se sigue que son analíticas y que su necesidad se fundamenta en la necesidad lógica.

Un punto clave de la filosofía de las matemáticas de Kant radica en rechazar la tesis racionalista de que las verdades matemáticas son analíticas *a priori* (pese a que lo analítico es lógicamente necesario) y en defender que ellas son sintéticas *a priori* y, por tanto, necesarias en algún otro sentido de *necesidad*. Pero si Kant afirma que los juicios analíticos *a priori* son necesarios y apodícticos, ¿por qué en ellos no pueden ser incluidos los de la matemática? ¿Por qué éstos tienen que ser sintéticos *a priori*? ¿Qué sentido de *necesidad* debe atribuirse a los juicios matemáticos?

Los juicios analíticos kantianos son proposiciones conceptuales cuya conocimiento descansa en el principio de identidad (como un criterio positivo) y en el principio de no contradicción (como un criterio negativo), que son "aspectos o formulaciones meramente diferentes de uno y el mismo principio fundamental" (Proops, 2014: 603-606). La definición de *juicio analítico* en *CRP* dice: analítico es un juicio en el que "el predicado *B* pertenece al sujeto *A* como algo que está contenido (ocultamente) en ese concepto *A* [...] Los juicios analíticos [...] son, por tanto, aquellos en los cuales

[15] Por supuesto que hay cuestionamientos sobre él, pero son más acerca de su origen gnoseológico que de su naturaleza lógica. ¿De dónde *procede* el principio? De ideas innatas, responde el racionalista (Leibniz); de la experiencia, responde el empirista (Locke). ¿Podría ser falso? No, responden ambos.

la conexión del predicado con el sujeto es pensada por identidad" (Kant, trad. en 2009: A6-7). Dos términos merecen atención en esta definición de analiticidad: *estar contenido en* e *identidad*. El primero significa que el concepto *B* puede hallarse al descomponer en conceptos más simples el contenido del concepto *A*, pues el análisis va de lo complejo a lo simple. El segundo significa que el contenido conceptual de ambos elementos de la proposición es coextensivo. En tanto que existe esta identidad entre los contenidos de ambos conceptos, que se reconoce sin requerimiento de la experiencia, los juicios analíticos son *a priori* y, por tanto, son necesarios y apodícticos, aunque discursivamente, como se explicó en la sección previa. Asimismo, como hay tal conexión de identidad dentro de los juicios analíticos, hay una necesidad lógica porque siguen el principio lógico de identidad y porque su negación lleva inminentemente a quebrantar el principio de no contradicción, lo que no puede ocurrir. Además, los juicios analíticos son *a priori* incluso si los conceptos en cuestión son empíricos, ya que es suficiente reconocer la identidad de los contenidos conceptuales en el juicio para conocerlo como verdadero cualquiera que sea el origen del concepto.

En los *Prolegómenos* (1783) Kant dice: "Todos los juicios analíticos descansan enteramente en el principio de contradicción y son, por su propia naturaleza, conocimientos *a priori*, si los conceptos que sirven de materia son empíricos o no" (Kant, trad. en 2004: 4, 267). ¿Qué significa que un juicio analítico descanse en un principio lógico? En la primera sección de este texto se apuntó que para Leibniz significa una reducción de la matemática a la lógica, pero no parece que este sea el sentido de Kant. Kant no *caracteriza* los juicios analíticos como aquellos que reducen sus términos a la forma lógica "*A* es *A*" y "*A* no es *A*", más bien, dice que el *contenido* de los conceptos obedece a estos principios. El juicio analítico *todos los cuerpos son extensos* no tiene la forma lógica del principio de identidad, pero en los conceptos *cuerpo* y *extenso* sí existe esta relación. Ian Proops sugiere que la importancia de los principios lógicos está en el estatus epistémico que otorgan a los juicios analíticos, ya que Kant está diciendo que "cualquier juicio, si es analítico, 'descansa' en el principio de contradicción en el sentido de que el conocimiento de su verdad descansa en el conocimiento de este principio *a priori*, por lo que, a su vez, es *a priori*" (Proops, 2005: 604).

Por su parte, Lanier Anderson (Anderson, 2021: 25; 2015: 12-25) lleva a cabo tres formulaciones de juicio analítico: *P* es analítico si y sólo si su predicado está contenido en su sujeto; *P* es analítico si y sólo si hay una conexión de identidad entre los contenidos de ambos conceptos; *P* es analítico si aclara mediante análisis un concepto. Es posible agregar una cuarta formulación, como una extensión de la segunda: *P* es analítico si y sólo si su negación lleva a una contradicción. Paul Bogossian (Bogossian, 1998: 334) ofrece otro sentido de analiticidad: *P* es analítico si y sólo si se reconoce como verdadero en virtud de comprender como idénticos los contenidos de sus conceptos componentes[16]. La diferencia entre las definiciones de Anderson y la de Bogossian es que las primeras tienen un sentido lógico-conceptual y la última uno epistémico. ¿Son entonces la analiticidad y su necesidad nociones lógico-conceptuales o epistémicas?

Anderson observa que la analiticidad depende de la estructura conceptual y lógica de los juicios, y ésta es una característica objetiva suya: "Los conceptos son idénticos exactamente cuando contienen los mismos signos [y] lo que un concepto contiene es un hecho lógico objetivo [...] La analiticidad llega a ser una característica intrínseca de la estructura lógica de los juicios" (Anderson, 2015: 31-32). Kitcher también apunta: "se puede decir que aquellas proposiciones [analíticas] son verdaderas en virtud de la estructura de nuestros conceptos porque ellos le deben su verdad a características particulares de esa estructura" (Kitcher, 1975: 24). Esto apoya la interpretación lógico-conceptual de la analiticidad. Pero en la explicación del mismo Kant de su definición de analiticidad dice que en la proposición analítica *todos los cuerpos son extensos*:

> No necesito salir del concepto que enlazo con el cuerpo, para encontrar conectada con él la extensión; sino que [necesito] solamente descomponer aquel concepto, es decir, sólo [necesito] *hacerme consciente* de lo múltiple que siempre pienso en él, para encontrar en él ese predicado. (Kant, trad. en 2009: A11; énfasis del autor)

Y líneas adelante agrega que al extraer por análisis un concepto de otro uno *toma consciencia* de la necesidad del juicio analítico. Tomar consciencia de algo no es otra cosa que reconocerlo. Esto parece apoyar la interpretación epistémica de analiticidad. Por supuesto, ambas interpretaciones no son excluyentes, sino complementarias, pero eso no quiere decir que tengan el mismo estatus. Reconocemos la identidad de los contenidos conceptuales porque hay una estructura conceptual objetiva en los juicios analíticos que se manifiesta en la contradicción de su negación. Los principios de identidad y contradicción son objetivos y sólo reconocemos que la estructura de los juicios analíticos los obedece. La analiticidad tiene relevancia epistémica en tanto que es explicativa de conceptos, incluso si no es útil para ensanchar el conocimiento, pero la tiene sólo porque los juicios analíticos tienen una estructura lógica y conceptual. Por tanto, ésta tiene prioridad sobre el conocimiento que podamos tener en los juicios analíticos.

---

[16] En realidad, Boghossian dice que "un enunciado 'es verdadero en virtud de su significado' siempre que la sola comprensión de su significado baste para tener una creencia justificada de su verdad" (Boghossian, 1998: 334). Pero para tener una creencia justificada del significado del enunciado como un todo hay que tener una comprensión de sus partes, según el principio de composicionalidad. Sin embargo, esta definición no es completa aún, porque un enunciado cualquiera puede ser reconocido como verdadero a partir de comprender el significado de sus partes. Por eso agrego que hay que comprender que entre las partes del enunciado hay una relación de identidad, pues de otra manera no podría ser analítico.

Ahora bien, como las verdades de la aritmética y de la geometría llevan a contradicciones si son negadas y tienen el carácter de necesarias, parece coherente relacionarlas con los juicios analíticos. Las proposiciones básicas de la matemática, como 2+2=4 o que un círculo es la línea cuyos puntos componentes son todos equidistantes a otro punto, no son verdades fácticas, aunque pueden encontrar instancias en los hechos asequibles a nuestra experiencia. Son verdades objetivas, sí, pero cuyo fundamento está más allá de la realidad percibida. Los contenidos de sus conceptos tienen una estrecha relación que no parece depender ni de los hechos físicos, ni de nosotros como sujetos cognoscentes, aunque somos nosotros quienes los comprendemos. Los conceptos de suma o adición del 2 consigo mismo o de círculo nos muestran, de alguna manera, el concepto del número 4 o el concepto de puntos continuos equidistantes a un punto fijo, respectivamente. Asimismo, pensar que la suma del 2 consigo mismo no es el número 4 es absurdo, tanto como lo es pensar que el círculo no es una línea continua cuyos puntos son equidistantes de un punto fijo. En estas proposiciones hay una identidad entre sus dos conceptos y una absurdez en su negación. Por tanto, las proposiciones matemáticas son analíticas, o, al menos —dice Kant en *CRP* — así lo habían pensado algunos filósofos racionalistas (Leibniz, como ha quedado evidenciado en las secciones anteriores).

Ante la reducción lógica leibniziana de algunas proposiciones matemáticas, Kant hace dos agudas observaciones en *CRP* sobre este procedimiento analítico. La primera: admite que los principios $a = a$ y $(a + b) > a$ "son analíticos y se basan en el principio de contradicción; pero, como proposiciones idénticas, sólo sirven para la concatenación del método, y no como principios [del método]" (Kant, trad. en 2009: B16-17), o sea, las verdades aritméticas, como los ejemplos de arriba, no son reducibles a los principios lógicos de identidad y de contradicción. La segunda y más importante es que no se trata únicamente de descomponer un concepto en partes, sino de cuidar que nada ajeno a su contenido sea introducido en el análisis. Ser analítico, dice, resulta ambiguo. Un sentido, como el de Leibniz, toma la analiticidad como la descomposición de un concepto en partes en la que algo más que el contenido del concepto es introducido; otro sentido, el kantiano, la toma como la descomposición de un concepto en partes sin que nada ajeno a su contenido es introducido. El problema con el supuesto análisis de Leibniz de la proposición 2+2=4 es que, en la proposición resultante, *1+1+1+1=1+1+1+1*, hay algo más que los contenidos de los conceptos: a través de la suma se ha introducido descuidadamente la intuición del tiempo en la que se agregan unidades, y esto es claro porque tal agregado no es algo que esté oculto en el concepto del número 4. Lo mismo ocurre con la proposición supuestamente analítica acerca del triángulo, pues al descomponer el concepto, llegamos a otros conceptos, como el de línea recta o el de ángulo, que implícitamente tienen la intuición del espacio. Cuando en una proposición hay una de ambas intuiciones, incluso si hay descomposición, aquélla no puede llamarse estrictamente analítica.

¿Cómo entonces se lleva a cabo el análisis de los conceptos? Anderson sostiene que el análisis kantiano de un juicio es una definición aristotélica por género y especie, esto es, una división lógica por jerarquía de conceptos en clases y sub-clases, donde éstas están contenidas en aquéllas (Anderson, 2004; 2015)[17] . Anderson encuentra evidencia de esta concepción kantiana de la descomposición de conceptos en los escritos de lógica del filósofo prusiano. Kant (Kant, trad. en 1992b: 910-911; Kant, trad. en 1992a: 146; cit. Anderson 2004: 509) menciona que hay conceptos superiores y otros inferiores; en los primeros, llamados géneros o *divisus* (concepto dividido) están contenidos los segundos, llamados especies o *membra dividentia* (miembros de la división). En un concepto dado, está contenido lo múltiple, entendido esto como una variedad de otros conceptos que lo determinan. Kant llama a esta descomposición de un concepto la división lógica de ese concepto. Por ejemplo, en *el hombre es un animal,* el término *hombre* es un concepto inferior, la especie, contenido en el superior *animal*, el género. Claro que esta proposición no cuenta como analítica, a menos que descompongamos todo lo múltiple del concepto *hombre* hasta que sus conceptos constituyentes lo determinen, esto es, hasta que ambas partes sean coextensivas. Así, la relación *estar contenido en* por la que definimos a los juicios analíticos significa formar parte de la división lógica de un concepto.

En este sentido, los juicios de la aritmética no son analíticos porque no pueden ser analizados como una definición aristotélica. Las palabras de Kant tantas veces citadas de que por más que uno analice la suma de los números 7 y 5 jamás se encontrará el concepto del número 12 se explica por esta división lógica de los conceptos (Kant, trad. en 2009: 15). En efecto, Anderson (Anderson, 2004) sostiene que la suma de los números 7 y 5 no forma parte de una jerarquía conceptual *única* dentro del concepto del número 12 porque en realidad este concepto puede descomponerse en infinitos conceptos: 11+1, 13-1, 3×4, √144, 4.345+7.655, etc. Entre cada una de estas expresiones matemáticas no hay una jerarquía, sino que sólo la hay entre cada una de ellas y el número doce. Desde esta perspectiva, el doce tiene una jerarquía multidimensional, esto es, el doce tendría una división lógica *ad infinitum*. Pero como señala Kant, "ningún concepto, como tal, puede ser pensado como si contuviese *en sí* una multitud infinita de representaciones" (Kant, trad. en 2009: B 40; cit. Anderson, 2004: 519). Las definiciones por género y especie que definen la analiticidad kantiana tienen, según Anderson, unidimensionalidad, esto es, una jerarquía en cadena desde un concepto complejo hasta muchos conceptos que lo dividen en conceptos más simples. Así, el concepto *humano* se dividiría en conceptos como *animal, mamífero, omnívoro*, etc. Cada uno de

[17] Esto contradice el sentido de las verdades analíticas tal como lo han concebido algunos filósofos de tradición anglosajona desde W. O. Quine. En "Two Dogmas of Empiricism" (1951) Quine simplifica la analiticidad como el hecho de ser verdadero en virtud del significado, abriendo paso a que proposiciones como *todos los solteros son no casados* sean analíticas por una cuestión de sinonimia y no por una de descomposición jerárquica de conceptos. La concepción de Kant no coincide con la de Quine y la de otros filósofos anglosajones de más reciente influencia, como Timothy Willamson.

los cuales continúa la jerarquía de la división. Ante esto, Anderson concluye: "la jerarquía permitiría únicamente un tipo de relación entre conceptos, y las proposiciones aritméticas como '7+5=12' exigen más que eso" (Anderson, 2004: 522). Por tanto, siguiendo este razonamiento, las proposiciones aritméticas no pueden ser analíticas.

No obstante, Kant (Kant, trad. en 2009: A727-732) rechaza que los juicios analíticos puedan llamarse definiciones (a lo más, son definiciones nominales, estériles en la matemática, como se apuntó arriba); reciben tal nombre sólo en un sentido laxo. La razón es que el análisis de los conceptos, empíricos o puros, entendido como la descomposición del concepto, nunca es exhaustivo, pues los límites de nuestro alcance cognitivo impiden que uno pueda estar seguro de si los conceptos simples en los que se descompone el concepto son *todos* los que lo constituyen, así como también impiden que uno tenga completa claridad de los conceptos simples que surgen en la descomposición. En suma, como se estableció en la segunda sección, los juicios analíticos como definiciones nominales no son precisas. Por ello, las definiciones producidas por descomposición o analíticamente no tienen certeza apodíctica. Pues la definición nominal no es más que la exposición detallada de un concepto dentro de sus propios límites; pero entonces el problema es *saber* cuáles son esos límites, es decir, hasta dónde tiene que parar mi análisis o si está en el camino correcto.

> Las definiciones analíticas pueden ser erróneas de muchas maneras, ya porque introducen notas que no residían efectivamente en el concepto, ya porque carecen de la exhaustividad que constituye lo esencial de una definición, porque uno no puede estar seguro de la integridad del análisis de aquél. (Kant, trad. en 2009: A732)

Esto parece contradecir lo que se ha dicho acerca de los juicios analíticos, especialmente el hecho de que se los considera como juicios apodícticos. Sin embargo, no es así. Lo que expresa Kant en este pasaje es simplemente que los juicios analíticos no pueden ser definiciones reales y que las *definiciones* analíticas no son apodícticas. Su ejemplo, *todos los cuerpos son extensos* es analítico, pero en ningún sentido se consideraría una definición, pues evidentemente la descomposición de un concepto en otro no es exhaustiva, ni pretende serlo. Lo que Kant diría ante la propuesta de Anderson sería que en los juicios analíticos sí hay una relación de género y especie y una división lógica del concepto superior, pero esta división no pretende llegar a *todas* las marcas distintivas de ese concepto; incluso si se llega a una, con tal de que cumpla la condición de estar contenida en él y ser pensada por identidad, sería sólo por ello analítica. Entonces, la división lógica de los conceptos no tiene que abarcar todos sus límites conceptuales para que el juicio resultante sea analítico.

Intuición y necesidad epistémica

Las definiciones propiamente dichas se presentan únicamente en la matemática. A diferencia de las definiciones analíticas, que son meramente explicativas y discursivas, las matemáticas "[son producidas] como construcciones de conceptos originariamente fabricados" (Kant, trad. en 2009: A730). Aquí la palabra clave es *construcción de conceptos*, que refleja lo esencial de la filosofía de las matemáticas de Kant. Si, por un lado, analizar un concepto nos lleva a explicarlo discursivamente dentro de sus propios límites, lo que significa que nuestro conocimiento no trasciende su contenido, construir el concepto significa, por otro lado, exhibirlo en la intuición en la que es posible llevar a cabo una síntesis mediante la imaginación y, con ello, extender el conocimiento más allá del mero concepto. En la definición matemática un concepto no está previamente dado para poder dividirlo en sus partes constitutivas; por el contrario, el concepto es dado *por* la definición real, esto es, por la construcción de otros conceptos exhibidos en la intuición. Así, para definir el concepto de *triángulo* tengo que construirlo mediante otros conceptos, como los de *línea recta* o *ángulo*, exhibidos en la intuición del espacio.

Las intuiciones de espacio y tiempo tienen un rol fundamental en la construcción de conceptos matemáticos y, por tanto, en el conocimiento matemático. Los conceptos refieren a una multiplicidad de objetos mediante marcas que les son comunes, o sea, ellos son representaciones generales de los objetos; las intuiciones, por otro lado, son representaciones singulares de los objetos y son, además, inmediatas (Kant, trad. en 2009: 320). Que las intuiciones son inmediatas quiere decir que los objetos de la razón están presentes en nosotros directamente, sin la intervención de la experiencia y, por tanto, *a priori*; que los conceptos son construidos quiere decir que son puestos en la intuición para representarlos individualmente. Puesto que las intuiciones del tiempo y del espacio son puras, y los conceptos que en ellas se exhiben pueden ser puros también, entonces hay una manera de conocer objetos inmediatamente, sin la intervención de la experiencia, lejos de todo análisis conceptual, conocimiento que logra trascender los límites de los conceptos con el auxilio de las intuiciones, por lo cual se ensancha. Por ejemplo, podemos dibujar la figura de un círculo en papel y tener así una representación empírica de un concepto mediante intuiciones igualmente empíricas, las sensaciones. Pero Kant nos dice que podríamos hacer ese mismo dibujo en nuestra mente sin apelar a la experiencia si exhibimos el concepto de círculo en nuestras intuiciones puras. Lo que estaríamos haciendo sería construir el concepto a partir de otros (punto, equidistancia, etc.) mediante la síntesis llevada a cabo en la intuición del espacio por la imaginación. Sin tener que trazar en papel la figura geométrica, uno tiene conocimiento de que el diámetro equivale al doble del radio porque uno lo *ve* en el sentido interno. Por tanto, el conocimiento *a priori* se extiende más allá de los conceptos puros sólo si éstos se exhiben en las intuiciones puras para llevar a cabo una síntesis.

Jaakko Hintikka ve en este proceder de Kant una reminiscencia del método matemático de Euclides y de la geometría antigua en general. Observa (Hintikka, 1967: 363-364) que para los geómetras antiguos hubo dos métodos de demostración: el primero es analítico, y consiste en suponer que se ha logrado un resultado o una construcción para, posteriormente, indagar las condiciones necesarias para efectivamente lograr el resultado supuesto; el segundo, dice, es el método sintético, en el que partimos de elementos simples para efectuar una construcción o un resultado deseado. El método analítico deconstruye un concepto hipotético hasta sus partes simples; el sintético toma el camino inverso. Ser sintético, entonces, es usar las intuiciones para construir. Por tanto, la diferencia entre ambos métodos geométricos es que "en el método analítico no se hace ninguna construcción, mientras que el sintético se basa en el uso de construcciones reales" (Hintikka, 1967: 363-364). Evidentemente, Hintikka compara los métodos geométricos antiguos con la distinción analítico/sintético de Kant. Pero lo interesante de las palabras de Hintikka no es esta comparación, sino en dónde encuentra la clave de la distinción entre analítico y sintético. De acuerdo con él, ésta está en un paso del método euclidiano llamado *ecthesis* traducido como *exposición* y que equivale en Kant a la exhibición de conceptos *in concreto* en la intuición. La *ecthesis* euclidiana es un paso del método demostrativo que consiste en particularizar o concretar el contenido de una enunciación más general a través de asumir que la figura de la que se trata está dibujada, es decir, es el paso de lo general a lo particular y concreto exhibido en la intuición empírica. Hintikka también observa que *ecthesis* forma parte de la lógica aristotélica en un sentido muy parecido a lo que en la lógica moderna llamamos instanciación existencial (Hintikka, 1967: 367-369). Asimismo, para Kant un concepto *in abstracto* sólo tiene una forma lógica o será vacío de contenido a menos que tenga un objeto al cual refiera; para ello, es preciso exhibirlo en la intuición como un concepto *in concreto* (Kant, trad. en 2009: A239). Por tanto, que los juicios matemáticos sean sintéticos depende de usar las intuiciones de tiempo y espacio para particularizar conceptos matemáticos al exhibirlos en ellas, contrario a los juicios analíticos, en los que los conceptos son siempre abstractos y no se destaca más que su forma lógico-conceptual. Este probable origen histórico de la exhibición de lo general en lo particular ilustra muy bien por qué las verdades matemáticas son para Kant verdades en las que la intuición es necesaria.

Charles Parsons (Parsons, 1992) critica la postura de Hintikka porque, desde su punto de vista, pasa por alto un criterio relevante en la filosofía de las matemáticas de Kant. Explica que la dicotomía entre intuiciones y conceptos, ambos necesarios, pero a la vez independientes en los juicios sintéticos *a priori*, corresponde con la división entre representaciones singulares y representaciones generales, respectivamente. El hecho de que tengamos conocimiento matemático inmediato se debe a la intuición, así que el conocimiento inmediato es siempre acerca de representaciones individuales. El paso de *ecthesis* en el método euclideano exhibe una representación individual en la intuición. Parsons escribe: "lo que satisface el criterio de inmediatez de la intuición también satisfará el criterio de singularidad" (Parsons, 1992: 45), y observa que el proceso inverso no siempre es válido, porque hay representaciones singulares mediadas por los conceptos que a veces se presentan en forma de descripciones definidas (v. g. el primer hombre que pisó la luna es tal y tal). La crítica de Parsons a Hintikka es que éste desestima la importancia del criterio de inmediatez, mencionado por Kant al inicio de la Estética Trascendental, que es de suma importancia por su rol en la representación intuitiva de los objetos de la matemática. Para Hintikka, el criterio de inmediatez se deriva del de singularidad. Pero si esto es cierto, entonces cabe la posibilidad de tomar el conocimiento mediato como conocimiento inmediato en aquellos casos en los que hay un concepto singular. Esto es: que algo sea singular no significa que es inmediato. Kant destaca la importancia de la exhibición de los conceptos en la intuición para tener conocimiento inmediato del concepto *in concreto*, es decir, de su objeto. Se considera que la observación de Parsons es atinada porque evita el riesgo de tomar el conocimiento mediato como inmediato en conceptos singulares y, sobre todo, porque insiste en la importancia de la intuición pura para acceder a objetos matemáticos por el conocimiento inmediato.

Otro punto clave de la sinteticidad de los juicios matemáticos radica en cuáles son los conceptos exhibidos en la intuición pura. En palabras de Kant: "sólo el concepto de magnitudes [*Grössen*] se puede construir, es decir, se puede exponer a priori en la intuición; mientras que las cualidades no se pueden exhibir en ninguna otra intuición que la empírica" (Kant, trad. en 2009: 714-715)[18] . Los conceptos de *causa*, *realidad*, por citar un par de ejemplos, sólo son expuestos en la experiencia, no así los de *número* o los de la geometría, expuestos en la intuición tanto pura como empírica. Sólo los conceptos matemáticos llevan consigo inherentemente una intuición pura. Esto es claro con los conceptos geométricos, que no pueden ser pensados sin la intuición del espacio (punto, línea recta, curva son ejemplos); en los conceptos aritméticos, como *número*, la misma claridad no ocurre, pero Kant explica que los números son unidades que sintetizan lo múltiple de una intuición (Kant, trad. en 2009: A142). Entonces, puesto que los conceptos matemáticos son los únicos que se exhiben y construyen en la intuición pura, y lo que se construye en ésta son cantidades, se sigue que únicamente los conceptos matemáticos son magnitudes espaciales o temporales (Shabel, 2021).

En *CRP* Kant define el concepto de magnitud (*quanti*) como "la conciencia de lo homogéneo múltiple en la intuición en general, en la medida en que mediante ella [la intuición] se hace, primeramente, posible la representación de un objeto" (Kant, trad. 2009: B203). Lo múltiple se refiere a un conjunto de individuos que comparten algo en común. En ese mismo pasaje afirma que en dicho concepto podemos pensar lo múltiple homogéneo de las experiencias, que contienen las intuiciones de espacio y tiempo que son cuantificables, como una unidad lograda a partir de una síntesis, de lo que concluye que "todos los fenómenos son *magnitudes* [*Grössen*]" (Kant, trad. 2009: B203). De esto se sigue que en todos los fenómenos están presentes los conceptos matemáticos o,

[18] Mario Caimi en su edición de *CRP* traduce *Grössen* como cantidades. Aquí se ha preferido seguir la traducción de la palabra alemana a la inglesa *Magnitude* para concordar con Sutherland.

lo que es lo mismo, que todos los fenómenos de la experiencia son cuantificables. Al respecto, Antonio López Molina apunta:

> [...] la percepción de un objeto como un fenómeno es gracias a que tenemos la síntesis de lo múltiple puro y homogéneo del espacio y del tiempo determinado que ocupa, lo que significa, en primer lugar, que los objetos, en cuanto fenómenos, deben subsumirse bajo las categorías de cantidad, y segundo, todos los fenómenos son magnitudes extensivas. (López Molina, 2005: 47)

No es que las cantidades estén por sí mismas en los fenómenos, más bien, es en virtud de nuestras intuiciones en las cuales los fenómenos nos son dados, que podemos matematizarlos. Entonces, la idea de Kant no indica en ningún sentido que los juicios matemáticos se justifiquen en la experiencia, más bien, apunta a sostener la aplicabilidad de la matemática en el mundo fenoménico a través de la síntesis lograda en la intuición pura. Lo común entre los juicios empíricos y los matemáticos es la síntesis de lo múltiple homogéneo, mientras que la marca distintiva es lo *a posteriori* y lo *a priori*, respectivamente; entre éstos, media la intuición.

Daniel Sutherland (Sutherland, 2004: 426) menciona que hay dos características clave de las magnitudes: el ser múltiple homogéneo y que esto ocurra en la intuición. A su vez, esto deriva en otras dos claves de las magnitudes: respectivamente son la síntesis de lo múltiple homogéneo en unidades, y el espacio y el tiempo en el que se da la síntesis. Pero las magnitudes no son siempre iguales: a veces las usamos para referir a algo concreto, para lo cual está el término *quantum*; otras veces, para referir a algo abstracto, para lo cual está el término *quantitas*. *Quantum* es una magnitud en sentido mereológico, pues las magnitudes pueden ser extensivas, en cuyo caso uno va del todo a las partes, o intensivas, construidas de las partes al todo (Sutherland, 2004*a*: 427; 2021: 281; López Molina, 2005: 47-56). El número 7, por ejemplo, es un todo que presupone sus partes, las unidades sintetizadas en la intuición del tiempo (1+1+1+1+1+1+1), por lo que es un *quantum* extensivo. *Quantitas* responde a la pregunta "¿Cuán grande es algo?" (Kant, trad. en 2009: B204) aplicada a dos tipos de cantidades, a saber, las continuas, que cuantifican sobre términos de masa de acuerdo con una unidad de medida (¿cuánto oro hay en el mundo?), y las discretas, que usamos para numerar individuos (¿cuántos apóstoles tuvo Cristo?). Las primeras miden, las segundas cuentan. *Quantum* y *quantitas* pueden o no coincidir. Por ejemplo, cuando exhibimos el concepto de *círculo* en la intuición lo construimos a partir de otros conceptos, como los de *punto* y *línea*, o sea, es un *quantum*; cuando derivamos verdades del círculo, como que el diámetro es mayor que el radio, se trata de *quantitas* en una cantidad continua; y si decimos que el círculo no tiene ninguna línea recta (tiene cero líneas rectas), se trata de *quantitas* como cantidad discreta. En este sentido, hay un *quantitas* del espacio (geométrico) y uno del tiempo (aritmético) (Kant, trad. en 2009: A717; *cfr*. Sutherland, 2004: 429). Ahora, puesto que todo fenómeno del sentido externo requiere de las intuiciones del espacio o del tiempo, entonces todo fenómeno en tanto es un múltiple homogéneo, tiene relación con *quantum* o con *quantitas*.

De lo anterior se desprende que el espacio y el tiempo, aunque intuiciones puras, son también magnitudes que corresponden *a priori* a *quantum*. Entonces, si bien todos los fenómenos del sentido externo son matematizables por las razones dichas arriba, también hay que aceptar, según esas mismas razones, que con independencia de cualquier experiencia en la intuición pura están presentes las proposiciones matemáticas debido a que el espacio y el tiempo son términos de masa y, por eso, son matematizables. Es posible pensar en una superficie más amplia que otra o en un periodo más largo que otro incluso sin cuantificarlos. Pero cuando relacionamos el espacio o el tiempo con patrones de medida, son también magnitudes que corresponden a *quantitas* de manera *a priori*. Por lo tanto, con o sin la experiencia de los fenómenos, las proposiciones matemáticas siempre son acerca de magnitudes en las que las intuiciones puras tienen un rol, y así, "los objetos matemáticos son magnitudes" (Sutherland, 2004: 435).

Ahora bien, según la caracterización del mismo Kant de los juicios sintéticos *a priori*, los principios de contradicción y de identidad no son la amalgama que une sus conceptos componentes, sino, más bien, la intuición pura y la imaginación que concreta la síntesis de las representaciones (Kant, trad. en 2009: A155). Esto indica que el sujeto 7+5 de la proposición sintética *a priori* *7+5=12* está conceptual y lógicamente separado del predicado *es igual a doce*, de tal modo que, tomando esto como premisas, se podría llegar a la conclusión de que es lógicamente posible decir que la suma de 7 y 5 no es 12. Esto es consistente con las palabras de Kant cuando afirma que al pensar en la suma de 7 y 5 no se piensa inmediatamente, por contenido conceptual, en el concepto 12, porque no se trata de una proposición analítica. Esto no parece conducir a ninguna contradicción si vemos la proposición aritmética desde su construcción en la intuición, a pesar de que la proposición sea transformada en una identidad de la forma *a=a* a la manera de Leibniz, ya que, al parecer, no estaríamos negando la identidad en su sentido lógico, sino la construcción del 12 desde el concepto de la suma de 5 y 7. Lo que se pretende destacar aquí es que, como las proposiciones aritméticas no pertenecen al campo de la lógica y no se rigen por sus principios según supuso Leibniz, entonces su negación, $7+5\neq 12$ es lógicamente posible[19]. Robert Hanna (Hanna, 2002: 334) propone dos

[19] Capozzi (Capozzi, 1980: 441) dice que para Kant la geometría es ciencia del espacio, pero la aritmética no es ciencia del tiempo, pese a que nuestro filósofo relaciona ambas ciencias con estas intuiciones. Tal afirmación indica que la geometría está sujeta a la intuición del espacio, de modo que, si el modelo del espacio cambia, cambia la geometría, como ocurre con las geometrías no euclidianas. Parsons (Parsons,1992: 58-59) menciona como un dato histórico la búsqueda en tiempos de Kant de posibilidades lógicas para la geometría y para la aritmética que no correspondieran con la teoría matemática y señala que en el caso de la aritmética es más difícil encontrar estas posibilidades. Aquí, Hanna presenta un modelo sencillo.

mundos posibles[20] en los que la negación de esta identidad numérica es lógicamente posible: el primero es un mundo compuesto por menos de doce elementos, el segundo es uno en el que haya doce o más elementos, pero en el que no existen funciones recursivas entre números, como las de sucesión o adición. Una réplica kantiana diría que tales mundos son inconsistentes, pues basta tener la intuición del tiempo para poder cuantificarlo como una magnitud extensiva en *quantitas*, y así tener más de doce elementos y, además, funciones recursivas. La respuesta esperada, por supuesto, es que en los modelos de tales mundos —propuestos por Hanna— la mente humana no sea un elemento, de modo que no podría existir la intuición del tiempo. Por lo tanto, sí hay al menos dos posibilidades lógicas de negar la identidad entre la suma del 7 y 5 y el 12.

Pero en el mundo efectivo en el que estamos, el *cogito* cartesiano salva nuestras intuiciones de espacio y tiempo, junto con los conceptos puros del entendimiento, de no existir. En este mundo (el conjunto de nuestras experiencias) los juicios matemáticos, que son todos sintéticos *a priori*, son necesarios y apodícticos. ¿Cuál es el fundamento de su necesidad? Arriba se ha expuesto la respuesta de Kant: ser necesario es coextensivo con ser conocido *a priori*. Desde la interpretación de Kitcher, esto significa que una proposición es necesaria si y sólo si es verdadera por encima de cualquier experiencia posible (entiéndase *estar por encima de* como *prescindir de*). Ahora se explica más detalladamente esta necesidad: puesto que en la intuición pura los conceptos puros que ofrece el entendimiento son exhibidos y con ello construidos de tal modo que el conocimiento matemático rebasa los límites de dichos conceptos, todo lo que en ella pensamos no *puede* ser pensado, es decir, construido, de otra manera. Son las intuiciones junto con los conceptos lo que determinan el objeto matemático pensado, incluso si son llevadas a la experiencia. Cada vez que uso mis dedos para sumar 7+5 mi intuición del tiempo y los conceptos que en ella exhibo han determinado previamente que no puedo llegar más que al número doce. Para Kant, son nuestras facultades cognitivas lo que modela nuestro conocimiento matemático. En este sentido, las proposiciones matemáticas son sintéticamente necesarias, de lo que se sigue que la necesidad de la matemática es de carácter epistémico. Hanna lo expresa así: "de acuerdo con Kant, las proposiciones sintéticas a priori son [restringidamente] necesarias. [...] Esto quiere decir que ellas son verdaderas en todos y únicamente los mundos humanamente experimentables" (Hanna, 2002: 331).

También es pertinente decir que las proposiciones matemáticas son necesarias porque son verdaderas en todo mundo epistémicamente posible. No es que, en efecto, tengamos acceso epistémico a todas las experiencias, más bien es que, *en principio*, podemos tenerlo. En cada una de ellas no encontraremos nada que pueda contradecir las proposiciones de la matemática, así que también se debe afirmar que, en este sentido, son necesarias. No es que la experiencia fundamente

[20] El término *mundo posible* Hanna lo entiende en un sentido metafísico, no como *experiencia posible*, en el sentido de Kitcher.

la necesidad matemática, es que la confirma. Es importante destacar la relevancia de la experiencia en la matemática para Kant. En *CRP* leemos que cuando los conceptos y las intuiciones puras no se refieren a experiencias sólo son meros juegos de la imaginación o del entendimiento; por el contrario, cuando son aplicables a las experiencias, encuentran su validez objetiva (Kant, trad. en 2009: A239; como se citó en Hanna, 2002: 331). Entonces, para darle a la matemática esta validez al mismo tiempo que necesidad, hay que agregar que una proposición matemática es necesaria si y sólo si es verdadera en toda experiencia posible. Por lo tanto, la necesidad matemática está dentro y por encima de cualquier experiencia o mundo posible.

Por supuesto, la necesidad epistémica no excluye la necesidad lógico-conceptual. Kant afirma que "una proposición sintética puede, por cierto, ser entendida según el principio de contradicción, pero sólo si se presupone otra proposición sintética de la cual aquélla puede ser deducida; nunca, empero, en sí misma" (Kant, trad. en 2009: B14). En efecto, cuando hacemos un razonamiento deductivo, como $5>4$ y $4>3$, por tanto, $5>3$[21], el principio de contradicción está presente, pero cada proposición es sintética *a priori*, no analítica. Esto apunta a que el principio de contradicción vale en conjunto con las proposiciones sintéticas *a priori*, pero no es inherente a ellas.

Por último, no hay que confundir esta necesidad lógico-conceptual con la que Kant menciona cuando dice que las proposiciones apodícticas, entre las cuales se cuentan, como se ha visto, las de la matemática, expresan necesidad lógica (Kant, trad. en 2009: A76). Ahí Kant explica que las proposiciones apodícticas piensan a las asertóricas, que hablan de la verdad (también llamada por él realidad lógica), como determinadas por las leyes del entendimiento. Al ser proposiciones verdaderas con tal determinación, Kant las considera lógicamente necesarias. Pero la lógica que se está tratando en esta parte de la *CRP* es una lógica de la verdad o lógica analítica trascendental, en la cual "ningún conocimiento puede contradecirla sin perder [...] toda referencia a algún objeto, y por tanto, toda verdad", por lo que ella "expone los elementos del conocimiento puro del entendimiento, y los principios sin los cuales no puede [...] ser pensado objeto alguno" (Kant, trad. en 2009: B87).

Así, puesto que los juicios sintéticos *a priori* exhiben sus conceptos en la intuición, con lo cual se piensan los objetos matemáticos, ellos requieren de esta lógica trascendental y de su necesidad, que no contiene el principio de contradicción aunque está en concordancia con él.

[21] Obedece al principio de contradicción porque, si fuera falso, diríamos que la parte es menor que el todo y que la partes es igual o mayor que el todo. Hanna escribe el siguiente ejemplo (Hanna, 2002: 347) :

(1) $7+5=12$
(2) $3+4=7$
(3) $3+4+5=12$.

Conclusiones

A lo largo de este texto se han expuesto los tres tipos de modalidad, y necesidad en particular, que Kant considera en su discusión sobre la naturaleza de los juicios de la matemática, a saber, metafísica, lógico-conceptual y epistémica. La primera se ha rechazado por la razón de que refiere a cómo son las cosas en sí mismas, en su constitución interna metafísica, lo que es inaccesible desde nuestras facultades cognitivas humanas. Ni la intuición ni el contenido de los conceptos pueden tener contacto con la constitución interna de los objetos, y puesto que su esencia es una propiedad que les pertenece necesariamente, se sigue que no podemos conocerla ni por conceptos ni por intuiciones. Lo que sí es posible conocer es su definición real, la esencia del objeto en la medida en que éste es construido por la exhibición de su concepto en la intuición. Esta esencia del objeto no debe confundirse con la constitución interna de las cosas en sí mismas, pues se refiere al objeto de un concepto formado en el sentido interno.

La necesidad lógico-conceptual se basa en dos principios fundamentales: el de identidad y el de contradicción. Las definiciones de juicios analíticos se basan en ambos principios, pues en ellos hay una relación de identidad entre sus contenidos conceptuales y no pueden ser negados sin contradicción. Por lo tanto, su necesidad otorga completa certeza sobre su verdad. Pero precisamente porque entre el sujeto y el predicado hay identidad conceptual, los juicios analíticos no rebasan los propios límites de cualquiera de ambos conceptos, así que el punto de salida siempre es el punto de llegada, con lo cual nada nuevo se llega a conocer, por más que se destaque su necesidad lógica y su certeza.

Por último, la necesidad epistémica tiene su fundamento en lo que está a nuestro alcance conocer, de acuerdo con nuestro pensamiento y nuestra sensibilidad. El primero ofrece los conceptos puros de la matemática, en la segunda éstos se concretan y se individúan, de tal modo que uno va más allá de los límites de los conceptos. La síntesis que se da gracias a la imaginación puede ser empírica o pura, pero la que ocurre en la matemática es siempre *a priori*, ya que ninguna experiencia ofrece un conocimiento científico como lo es el matemático, de modo que la síntesis matemática tiene que ser pura. Puesto que lo *a priori* siempre está ligado a la necesidad, los juicios matemáticos siempre son necesarios. Basado en la interpretación de los mundos posibles que, en la filosofía de Kant no son otra cosa que experiencias posibles, esto es, experiencias humanamente asequibles según la capacidad de nuestras facultades, se ha sostenido que la necesidad de las matemáticas tiene que ser epistémica en el sentido de que su conocimiento es *a priori*, o sea, está por encima de cualquier experiencia posible, pero también en el sentido de que los juicios matemáticos son verdaderos *en* cualquier experiencia posible, pues si bien no todas las experiencias son efectivas (algo humanamente inasequible), el hecho de que su necesidad esté fundamentada *a priori* significa que no habrá experiencia alguna que pueda contradecir nuestros juicios matemáticos, así que éstos se cumplen en toda experiencia posible. Ψ

Bibliografía

ABACI, Uygar (2021). "Modality" [Modalidad]. En Wuerth, Julian (Ed.). *The Cambridge Kant Lexicon* [Léxico Cambridge de Kant]. Cambridge University Press.

ANDERSON, Lanier (2004). "It Adds up after all: Kants´s philosophy of arithmetic in light of the traditional logic" [Después de todo, todo cuadra: La filosofía de la aritmética de Kant a la luz de la lógica tradicional]. *Philosophy and Phenomenological Research*. Vol LXIX, No. 3. https://doi.org/10.1111/j.1933-1592.2004.tb00517.x

ANDERSON, Lanier (2015). *The poverty of conceptual truth. Kant´s analytic/synthetic distinction and the limits of metaphysics*. [La pobreza de la verdad conceptual. La distinción analítico/sintético de Kant y los límites de la metafísica] Oxford University Press.

ARISTOTELES (1998). *Metafísica de Aristóteles*. García Yebra, Valentín (Trad.). Gredos.

ARISTÓTELES (1960). *Posterior analytics/Topica* [Analíticos posteriores/Tópicos]. Tredennick, Hugh y Forster, Edward (Trads.). Harvard University Press.

BECK, Lewis (1956). "Kant´s Theory of Definition" [La teoría de la definición de Kant]. *The Philosophical Review*. Vol 65, No. 2. https://doi.org/10.2307/2182830.

BLECHER, Ian (2021). "Necessity" [Necesidad]. En Wuerth, Julian (Ed.). *The Cambridge Kant Lexicon* [Léxico Cambridge de Kant]. Cambridge University Press.

BOGHOSSIAN, Paul (1998). "Analyticity" [Analiticidad]. En Hale, Bob y Wright, Crispin (Eds.). *A Companion to philosophy of language* [Un compañero para la filosofía del lenguaje]. Blackwell.

CAPOZZI, Mirella (1980). "Kant On Mathematical definition" [Kant. Sobre definición matemática]. En Dalla, Chiara, Maria Luisa (Ed.) *Italian Studies in the Philosopy of Sciences*. Vol. 47. https://doi.org/10.1007/978-94-009-8937-5_23

CURLEY, Edwin (1984). "Descartes On creation of eternal truths" [Descartes. Sobre la creación de verdades eternas]. *The Philosophical Review*. No. 93. https://doi.org/10.2307/2184828

DESCARTES, René (1996). *Meditations on first Philosophy with selections from the objections and replies* [Meditaciones de filosofía primera con selecciones de las objeciones y las réplicas]. Cottingham, John (Trad.). Cambridge University Press.

HALE, Bob (2020). "Essence and definition by abstraction" [Esencia y definición por abstracción] en Jessica Leech (Ed.) *Essence and existence. Selected essays* [Esencia y existencia. Ensayos selectos]. Oxford University Press: Oxford.

HANNA, Robert (2002). "Mathematic for Humans: Kant's Philosophy of Arithmetic Revisited" [Matemáticas para humanos. La filosofía de la aritmética de Kant revisada]. *European Journal of Philosophy*. Vol. 10, No. 3. https://doi.org/10.1111/1468-0378.00165

HEIS, Jeremy (2014). "Kant (vs. Leibniz, Wolff and Lambert) on real definitions in geometry" [Kant (vs. Leibniz, Wolff y Lambert) sobre definiciones reales en geometría]. *Canadian Journal of Philosophy*. Vol. 44, No. 5-6. https://doi.org/10.1080/00455091.2014.971689

HINTIKKA, Jakko (1967). "Kant On mathematical method" [Kant. Sobre el método matemático]. *The Monist*. Vol. 3, No. 51. https://doi.org/10.5840/monist196751322

KANT, Immanuel (1992*a*). "The Jäsche Logic" [La lógica Jäsche] en Young, Michael (Ed.). *Lectures on Logic* [Cursos de lógica]. Young, Michael (Trad.). Cambridge University Press.

KANT, Immanuel (1992*b*). "Vien Logic" [La lógica Viena] en Young, Michael (Ed.). *Lectures on Logic* [Cursos de lógica]. Young, Michael (Trad.). Cambridge University Press.

KANT, Immanuel (2004). *Prolegomena to any future metaphysics, that Will be able to come forward as Science* [Prolegómenos a cualquier metafísica futura que sea capaz de presentarse como ciencia]. Gary Hatfield (Trad.). Cambridge University Press.

KANT, Immauel. (2009). *Crítica de la razón pura*. Mario Caimi (Trad.). UNAM/UAM/FCE.

KITCER, Philip (1975). "Kant and the foundation of Mathematics" [Kant y los fundamentos de las matemáticas]. *The Philosophical Review*. Vol. 84, No. 1. https://doi.org/10.2307/2184079

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (2011*a*). *A Corning*. En *Leibniz*. Javier Echeverría (Trad.). Gredos. Vol. I.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (2011*b*). *En torno a la libertad y la necesidad*. En *Leibniz*. Roberto Rodríguez Aramayo y Concha Roldán (Trads.). Gredos. Vol. I.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (2011c). *De la contingencia*. En *Leibniz*. Jaime de Salas (Trad.). Gredos. Vol. I.

LÓPEZ MOLINA, Antonio (2005). “Principios matemáticos y objeto de conocimiento según Kant”. *Praxis filosófica*. No. 19. https://doi.org/10.25100/pfilosofica.v0i19.3219.

MACFARLANE, John (2002). “Frege, Kant, and the Logic in Logicism” [Frege, Kant y la lógica en el logicismo]. *The Philosophical Review*. Vol 111, No. 1. https://doi.org/10.1215/00318108-111-1-25.

PARSONS, Charles (1992). “Kant’s Philosophy of Arithmetic” [La filosofía de la aritmética de Kant]. En Possy, Carl J. (Ed.). *Kant´s philosophy of mathematics. Moderns Essays* [La filosofía de las matemáticas de Kant. Ensayos modernos]. Kluwer Academic Publishers.

PROOPS, Ian (2005). “Kant´s conception of analytical judgment” [La concepción de juicio analítico de Kant]. *Philosophy and Phenomenological Research*. Vol. 70, No. 3. https://doi.org/10.1111/j.1933-1592.2005.tb00416.x.

QUINE, Willard Orman (1951). “Two dogmas of Empiricism” [Dos dogmas del empirismo]. *Philosophical Review*. Vol. 60, No. 1. https://doi.org/10.2307/2266637.

SHABEL, Lisa (2021). “Kant’s Philosophy of mathematics” [La filosofía de las matemáticas de Kant]. Edward Zalta (Ed.). *The Stanford Encyclopidia of Philosophy*. https://plato.stanford.edu/entries/kant-mathematics/.

SPINOZA, Baruch de (2021). *Ética demostrada según el orden geométrico*. Peña, Vidal (Trad.). Alianza Editorial.

SUTHERLAND, Daniel (2004) “The role of Magnitude in Kant´s Critical Philosophy” [El rol de la magnitud en la filosofía crítica de Kant]. *Canadian Journal of Philosophy*. Vol 34, No. 3. https://doi.org/10.1080/00455091.2004.10716573.

SUTHERLAND, Daniel (2021). “Magnitude” [Magnitud]. En Wuerth, Julian (Ed.). *The Cambridge Kant Lexicon* [Léxico Cambridge de Kant]. Cambridge University Press.